

НОРМАЛЬНЫЕ ВЕКТОРЫ ЕВКЛИДОВЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Аннотация.

Актуальность и цели. Поверхности многомерных евклидовых пространств в настоящее время активно исследуются. Выделяются гиперповерхности и цилиндрические поверхности. Во многих случаях нужны векторы нормалей поверхности. Поверхность, описываемая несколькими явными скалярными функциями многих параметров, является пересечением цилиндрических поверхностей. Поэтому необходимы методы получения нормалей цилиндрических поверхностей.

Материалы и методы. Нормальные векторы цилиндрических поверхностей получаются как поливекторы и свойства цилиндрических поверхностей используются в исследовании поверхностей пересечения.

Результаты. Выписаны координаты нормальных векторов цилиндрических поверхностей. Установлено, что нормальные плоскости поверхностей порождаются нормальными векторами цилиндрических поверхностей. Для примера найдены координаты нормальных векторов поверхности Веронезе 8-мерного евклидова пространства, заданной пятью явными скалярными функциями. Приведена нормальная плоскость поверхности.

Выводы. Получены нормальные плоскости поверхностей многомерных евклидовых пространств.

Ключевые слова: многомерное евклидово пространство, поверхность, цилиндрическая поверхность, координаты векторов нормали, нормальная плоскость поверхности, метрическая форма поверхности, определяемость поверхности.

А. И. Dolgarev

NORMAL VECTORS OF EUCLIDEAN MULTIDIMENSIONAL SURFACES

Abstract.

Background. Surfaces of multidimensional Euclidean spaces are actively investigated nowadays. One distinguishes hypersurfaces and cylindrical surfaces. In many cases there is a need for vectors of surface normal. The surface, described by several explicit scalar functions of multiple parameters, is an intersection of cylindrical surfaces. Therefore, there is a need for methods to obtain normals of cylindrical surfaces.

Materials and methods. Normal vectors of cylindrical surfaces appear to be ad multivectos, and the properties of cylindrical surfaces are used in the study of intersection surfaces.

Results. The author obtained coordinates of normal vectors of cylindrical surfaces. It has been established that normal planes of surfaces are generated by normal vectors of cylindrical surfaces. Ad exemplum, the researcher found coordinates of normal vectors of the Veronese surface of the 8D Euclidean space, set by 5 scalar functions, and gave the surface's normal plane.

Conclusions. The author has obtained normal planes of surfaces of multidimensional Euclidean spaces.

Key words: multidimensional Euclidean space, surface, cylindrical surface, coordinates of normal vectors, normal plane surfaces, metric form of a surface, surface determinability.

Введение

В последнее время создана простая теория поверхностей многомерных евклидовых пространств [1–5], в которой поверхность представлена как пересечение цилиндрических гиперповерхностей, описываемых одной явной скалярной функцией, устанавливается определяемость поверхности метрическими формами цилиндрических поверхностей. Поверхности F^n евклидовых пространств E^m , $n < m$, описываемых k n -параметрическими функциями $z^c = z^c(x^1, \dots, x^n)$, $c = 1, \dots, k$, в каждой своей обыкновенной точке имеют k нормалей. Ниже указаны координаты векторов нормалей поверхности по заданным функциям z^c .

1. Первые вопросы теории поверхностей

1.1. Евклидово пространство

Пусть E^m – m -мерное, $m \geq 3$, евклидово пространство с векторным пространством V^m . Точками в E^m являются кортежи действительных чисел $x = (x^1, \dots, x^m)$, они обозначаются: $A, \dots, M, \dots$. Векторами в V^m являются кортежи $x = (x^1, \dots, x^m)$, над векторами производятся операции:

$$x + y = (x^1, \dots, x^n) + (y^1, \dots, y^n) = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n),$$

$$t(x^1, \dots, x^n) = (tx^1, \dots, tx^n), \quad t \in R.$$

В E^m выбран репер $B = (O, e_1, \dots, e_n)$. В векторном пространстве V^m определено евклидово скалярное произведение векторов x и y :

$$xy = x^1 y^1 + \dots + x^m y^m.$$

В случае xx имеем скалярный квадрат вектора $x^2 = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2$. Нормой, или длиной вектора x , называется неотрицательное число

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}.$$

Векторы x, y называются перпендикулярными (ортогональными), $x \perp y$, если $xy = 0$. Векторы репера e_i считаются взаимно перпендикулярными и единичными, т.е. выбранный репер считается ортонормированным.

Паре точек (H, M) , $H = (h^1, \dots, h^m)$, $M = (x^1, \dots, x^m)$ ставится в соответствие вектор $HM = (x^1 - h^1, \dots, x^m - h^m)$.

Длина вектора $HM = (x^1 - h^1, \dots, x^n - h^n)$ равна

$$|HM| = \sqrt{(x^1 - h^1)^2 + \dots + (x^n - h^n)^2}$$

и является расстоянием между точками H, M в пространстве E^m .

Всякий вектор h пространства E^m вместе со всякой точкой P из E^m определяет в пространстве E^m прямую $\langle P, h \rangle$; которая есть 1-параметрическое множество точек

$$\langle P, h \rangle = \{M \mid PM = th, t \in R\};$$

k -плоскость $\langle P, h_1, \dots, h_k \rangle$, $k < m$, пространства E^m , где $h_1, \dots, h_k$ независимые векторы, есть k -параметрическое множество точек

$$\langle P, h_1, \dots, h_k \rangle = \left\{ M \mid PM = t^c h_c, t^c \in R, c = 1, \dots, k \right\}.$$

Если $k = m$, то m -плоскость $\langle P, h_1, \dots, h_m \rangle$ совпадает с пространством E^m .

1.2. Поверхности

Рассматривается n -параметрическое погружение

$$F^n : E^n \rightarrow E^m,$$

в котором точки $x = (x^1, \dots, x^n)$ пространства E^n отображаются на точки $u = (u^1, \dots, u^m)$ пространства E^m . Имеется m функций $u^j = u^j(x)$ n параметров x^i . Функции $u^j(x)$ являются q раз дифференцируемыми. Обозначим: $u_i^j = \partial u^j / \partial x^i$. Ранг матрицы (u_i^j) равен n . Тем самым имеется погружение $F^n : E^n \rightarrow E^m$ класса C^q . Обычно используется следующее

Определение. Поверхностью F^n пространства E^m , $n < m$, называется n -параметрическое погружение $F^n : E^n \rightarrow E^m$ класса C^q в паре с образом в погружении.

Поверхность F^n описывается k явными скалярными функциями n параметров $z^c = z^c(x)$, $c = 1, \dots, k$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, или векторной функцией

$$F^n : r(x, u) = (x^1, \dots, x^n, z^1(x), \dots, z^k(x), u^{n+k+1}, \dots, u^m). \quad (1)$$

Если $k = 1$, то поверхность описывается одной явной скалярной функцией $z = z(x)$ или векторной функцией

$$F^n : r(x, u) = (x^1, \dots, x^n, z(x), u^{n+2}, \dots, u^m). \quad (2)$$

Прямую $\langle P, h \rangle$, рассматриваемую в погружении $F^1 : E^1 \rightarrow E^{m-1}$, можно считать 1-параметрической поверхностью.

k -плоскость $\langle P, h_1, \dots, h_k \rangle$, $k < m$, пространства E^m , $h_1, \dots, h_k$ – независимые векторы, $h_c = (h_c^1, \dots, h_c^m)$, $c = 1, \dots, k$, описывается m скалярными явными функциями

$$z^c = h_1^c t^1 + \dots + h_k^c t^k + p^c$$

k параметров t^j , где $t = (t^1, \dots, t^k)$ – точка пространства E^k с векторным пространством $V^k = \langle h_1, \dots, h_k \rangle$, натянутым на векторы $h_1, \dots, h_k$ из V^m . k -плоскость $\langle P, h_1, \dots, h_k \rangle$ задается в отображении $F^k : E^k \rightarrow E^m$. Векторное описание k -плоскости:

$$r(t) = (t^1, \dots, t^k, z^1(t), \dots, z^m(t)).$$

k -плоскость является примером k -параметрической поверхности.

Предполагается, что образ в погружении не совпадает с пространством E^m , в которое производится погружение.

Величины x^i называются параметрами поверхности [2], величины u^j называются параметрами размерности, или свободными параметрами; свободные параметры u^j от параметров поверхности x^i не зависят. Векторы (1) и (2) называются параметризациями поверхности F^n . Для указания числа явных функций k , задающих поверхность F^n , также используется символ $F_{(k)}^n$; для указания размерности пространства, в котором лежит n -параметрическая поверхность F^n , будем писать $F_{(k)}^{n(m)}$. Параметризации (1), (2) поверхности F^n называются стандартными.

1.3. Гиперповерхности

Пусть в заданиях (1) и (2) выполняются соотношения: $m = n + k$, соответственно $m = n + 1$, задания поверхностей принимают вид

$$F^n = F_{(k)}^{n(m)} : r(x) = (x^1, \dots, x^n, z^1(x), \dots, z^k(x)); \quad (3)$$

$$F^n = F_{(1)}^{n(m)} : r(x) = (x^1, \dots, x^n, z(x)), \quad (4)$$

т.е. это параметризации поверхностей, не содержащие свободных параметров. Размерности векторов (3), (4) равны m . Тем самым заданы гиперповерхности пространства E^m . Параметризация (4) описывает гиперповерхность, заданную одной явной скалярной функцией, это поверхность-график; параметризация (3) описывает гиперповерхность, заданную k явными скалярными функциями. В частности, в 3-мерном пространстве E^3 все поверхности

$$F^2 : r(x, y) = (u(x, y), v(x, y), w(x, y)) \quad (5)$$

являются гиперповерхностями и все поверхности вида

$$F^1 : r(x) = (u(x), v(x), w) \quad (6)$$

являются гиперповерхностями, это поверхности размерности 2 в 3-мерном пространстве. В последнем случае в описании поверхности имеется один свободный параметр w . Параметризации (5)–(6) не являются стандартными.

1.4. Цилиндрические поверхности

Если $n+1 < m$ в задании (2), то задание поверхности содержит свободные параметры и поверхность может описываться n -параметрической скалярной функцией $z = z(x)$, векторное задание поверхности F^n изменится по сравнению с (4) ввиду того, что пространство E^m m -мерно, и задание примет вид

$$F^n : r(x, u) = (x^1, \dots, x^n, z(x), u^{n+2}, \dots, u^m), \quad (7)$$

как в (2). Всякий объект пространства E^m описывается m -мерным вектором. В частности, n -компонентный вектор $n < m$ с ненулевыми первыми n компонентами $x^1, \dots, x^n$ описывается вектором $(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$, последние $(m-n)$ компонент которого нулевые. Поверхность F^n (7) является цилиндрической [1] по аналогии с поверхностью F^1 одного параметра пространства E^3 , где выбран репер $B = (O, e_1, e_2, e_3)$, и поверхность задана векторной функцией вида

$$r(x, y) = (x, z(x), y), \quad (8)$$

здесь функция $z = z(x)$ одного параметра x , и от параметра y не зависит; y является свободным параметром. 1-параметрическая функция $z = z(x)$ задает в плоскости $\langle O, e_1, e_2 \rangle$ линию $z = z(x)$, называемую направляющей цилиндрической поверхности $(x, z(x), y)$, прямолинейные образующие этой поверхности есть $\langle O, e_3 \rangle$, это прямые, лежащие на поверхности (8). Плоскость прямолинейных образующих поверхности (8) 1-мерна.

Цилиндрическая поверхность (7) обладает направляющей поверхностью:

$$r(x) = (x^1, \dots, x^n, z(x), 0, \dots, 0),$$

вектор $r(x) = (x^1, \dots, x^n, z(x))$ содержится в подпространстве $\langle O, e_1, \dots, e_{n+1} \rangle$ пространства E^m ; прямолинейные образующие $\langle P, h \rangle$ поверхности (7) имеют своими векторами: $h = h^{n+2}e_{n+2} + \dots + h^m e_m$, где P – точка направляющей поверхности. Выполняется следующая теорема.

Теорема 1. Размерность плоскости прямолинейных образующих поверхности (7) равна числу свободных параметров и $l = m - n - 1$.

Плоскость прямолинейных образующих $\Pi^l = \langle P, e_{n+k+1}, \dots, e_m \rangle$ цилиндрической поверхности (7) лежит на поверхности. При $m > n + k$

имеем цилиндрическую поверхность (1), заданную k явными скалярными функциями $z^c = z^c(x)$, ее направляющая поверхность есть: $r(x) = (x^1, \dots, x^n, z^1(x), \dots, z^k(x), 0, \dots, 0)$, лежит в $(n+k)$ -плоскости пространства E^m , прямолинейные образующие $\langle P, h \rangle$ определяются векторами $h = h^{n+k+1}e_{n+k+1} + \dots + h^m e_m$. Размерность плоскости прямолинейных образующих поверхности (1) равна $l = m - n - k$.

1.5. Поверхность как пересечение цилиндрических поверхностей

Пусть поверхность F^n описывается $k > 1$ функциями $z^c = z^c(x)$, см. (1):

$$F^n = F_{(k)}^{n(m)} : r(x, u) = (x^1, \dots, x^n, z^1(x), \dots, z^k(x), u^{n+k+1}, \dots, u^m). \quad (9)$$

Каждая из функций $z^c = z^c(x)$ при $m > n + k$ (согласно разд. 1.4) в пространстве E^m задает цилиндрическую поверхность $F_c^n = F_{c(1)}^n$:

$$F_c^n : r^c(x, u) = (x^1, \dots, x^n, u^{n+1}, \dots, u^{n+c-1}, z^c(x), u^{n+c+1}, \dots, u^m). \quad (10)$$

Имеются следующие k цилиндрических поверхностей:

$$F_1^n : r^1(x, u) = (x^1, \dots, x^n, z^1(x), u^{n+2}, \dots, u^m),$$

$$F_2^n : r^2(x, u) = (x^1, \dots, x^n, u^{n+1}, z^2(x), u^{n+3}, \dots, u^m), \dots,$$

$$F_k^n : r^k(x, u) = (x^1, \dots, x^n, u^{n+1}, \dots, u^{n+k-1}, z^k(x), u^{n+k+1}, \dots, u^m).$$

Размерность каждой из них равна $m - 1$ [1]:

$$F^n = \bigcap_c F_c^n. \quad (11)$$

Теорема 2 [2, 3]. Поверхность F^n (11) n параметров пространства E^m , описываемая k скалярными функциями, $z^c(x)$ является пересечением (11) $F^n = \bigcap_c F_c^n$.

k цилиндрических поверхностей F_c^n , размерность каждой из которых равна $m - 1$; $m = n + k + l$, число l есть размерность плоскости прямолинейных образующих цилиндрической поверхности F^n .

Действительно, точка P лежит на поверхности F^n , если и только если она лежит на каждой из поверхностей F_c^n .

Пример. Погружение $F^2 : E^2 \rightarrow E^3$ задано тремя функциями двух параметров:

$$u = u(x, y), v = v(x, y), w = w(x, y). \quad (12)$$

Можно описать это погружение в пространстве E^3 векторной функцией:

$$F_{(3)}^{2(3)} : r(x, y) = (u(x, y), v(x, y), w(x, y)). \quad (13)$$

Здесь задано два параметра (x, y) и три функции двух параметров (12); тем самым задано пять компонент, поэтому отображение (12) в стандартной параметризации должно описываться в 5-мерном пространстве E^5 и 5-мерным вектором:

$$F_{(3)}^{2(5)} : r(x, y) = (x, y, u(x, y), v(x, y), w(x, y)). \quad (14)$$

В 3-мерном пространстве функции (12) описывают три цилиндрические поверхности:

$$F_{1(1)}^{2(3)} : r_{(1)}(x, y) = (u(x, y), x, y), \quad F_{2(1)}^{2(3)} : r_{(2)}(x, y) = (x, v(x, y), y),$$

$$F_{3(1)}^{2(3)} : r_{(3)}(x, y) = (x, y, w(x, y)),$$

В 5-мерном пространстве имеются цилиндрические поверхности, описываемые функциями (12) с использованием свободных параметров s^p , $p = 1, \dots, 5$ [4],

$$F_{1(1)}^{2(5)} : r^1(x, y, s) = (x, y, u(x, y), s^4, s^5),$$

$$F_{2(1)}^{2(3)} : r^2(x, y, s) = (x, y, s^3, v(x, y), s^5),$$

$$F_{3(1)}^{2(3)} : r^3(x, y, s) = (x, y, s^1, s^2, w(x, y)).$$

Выполняются соотношения:

$$F^{n(3)} = \bigcap_c F_{c(1)}^{n(3)} \quad \text{и} \quad F^{n(5)} = \bigcap_c F_{c(1)}^{n(5)}.$$

В частности, если в E^3 задана поверхность

$$F^{2(3)} : r(x, y) = (x^2 + y^2, xy, x^2 - y^2),$$

параметризация не стандартная, то в E^3 имеются поверхности:

$$F_{1(1)}^{2(3)} : r_{(1)}(x, y) = (x^2 + y^2, x, y), \quad F_{2(1)}^{2(3)} : r_{(2)}(x, y) = (x, xy, y),$$

$$F_{3(1)}^{2(3)} : r_{(2)}(x, y) = (x, y, x^2 - y^2) \quad \text{и} \quad F_{(3)}^{2(3)} = \bigcap_c F_c^{2(3)} = \bigcap_c F_{c(1)}^{2(3)}.$$

В E^5 задана поверхность в стандартной параметризации:

$$F_{(3)}^{2(5)} : r(x, y) = (x, y, x^2 + y^2, xy, x^2 - y^2),$$

и цилиндрические поверхности:

$$F_1^{2(5)} : r^1(x, y, s) = (x, y, x^2 + y^2, s^4, s^5), F_2^{2(5)} : r^2(x, y, s) = (x, y, s^3, xy, s^5),$$

$$F_3^{2(5)} : r^3(x, y, s) = (x, y, x^2 - y^2, s^4, s^5), F^{n(5)} = \bigcap_c F_c^{n(5)} = \bigcap_c F_{c(1)}^{n(5)}.$$

В работе [4] поверхность $F_{(3)}^{2(5)}$ получается по метрическим формам цилиндрических поверхностей $F_c^{2(5)}$. Однако поверхность (13) $F_{(3)}^{2(3)}$ может быть получена по метрическим формам поверхностей $F_{c(1)}^{2(3)}$.

1.6. Касательная плоскость поверхности

Вектор касательной к x^i -линии поверхности $r(x, u)$ обозначим $r_i = \partial r / \partial x^i$. Сначала рассмотрим поверхность $r(x, u)$, заданную одной явной скалярной функцией (7).

Векторы касательных x^i -линий:

$$r_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, z_i, 0, \dots, 0), \quad z_i = \partial z / \partial x^i. \quad (15)$$

Компонента 1 вектора (15) имеет номер i , компонента z_i имеет номер $n+1$.

Если поверхность задана функцией (1), то вектор r_i касательной координатной x^i -линии таков:

$$r_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, z_i^1, \dots, z_i^k, 0, \dots, 0), \quad z_i^c = \partial z^c / \partial x^i. \quad (16)$$

Компонента 1 имеет номер i , компоненты z_i^c имеют соответственно номера $n+c$. Ниже, в разд. 1.7, предлагается специфическая запись компонент вектора.

Кроме указанных касательных векторов r_i координатных x^i -линий поверхности, цилиндрические поверхности имеют и касательные векторы другого вида. Цилиндрическая поверхность (8) 3-мерного пространства содержит прямолинейные образующие $\langle O, e_3 \rangle$, и вектор e_3 является касательным к поверхности (8) вдоль прямолинейной образующей. Цилиндрические поверхности (1) и (2) содержат прямолинейные образующие $\langle O, e_p \rangle$ с векторами e_p , $p = n+k+1, \dots, m$, соответственно $p = n+2, \dots, m$, при $k=1$. Векторы r_i и e_p независимы, порождают вместе с точкой H поверхности F^n касательную плоскость. Выполняется соотношение

$$m = n + k + l,$$

где l – число свободных параметров поверхности. Поверхность (1) имеет n касательных векторов r_i и $l = m - n - k$ свободных параметров, т.е. l касательных векторов e_p . Касательные плоскости поверхностей (1) и (2) порождаются $n + l$ независимыми касательными векторами r_i, e_l и таковы:

$$T_P F^n = \langle P, r_1, \dots, r_n, e_{n+k+1}, \dots, e_m \rangle. \quad (17)$$

Для поверхностей (3) и (4), не имеющих свободных параметров, касательные плоскости таковы:

$$T_P F^n = \langle P, r_1, \dots, r_n \rangle. \quad (18)$$

Теорема 3. Размерность касательной плоскости (17) поверхности (1) равна

$$n + l = n + (m - n - k) = m - k,$$

и поверхности (2) равна $m - 1$, т.е. равна размерности пространства без числа функций, задающих поверхность. Размерность плоскости (18), поверхности без свободных параметров равна n .

1.7. Специфическая форма записи компонент вектора

Как отмечено выше, например в записи вектора касательной (17) поверхности $x = (x^1, \dots, x^n)$, важно указать номер компоненты вектора, имеющей заданное значение. В соответствии с этим условимся при необходимости компоненты векторов записывать в виде дробей $\frac{r_{(t)}}{t}$, где t есть номер компоненты вектора r , а $r_{(t)}$ есть значение компоненты с номером t . Указанную запись векторов назовем специфической. При таком соглашении вектор r_i касательной

$$r_i = \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, z_i^1, \dots, z_i^k, 0, \dots, 0 \right), \quad (19)$$

к поверхности $F_{(k)}^{n(m)}$, см. (1), имеет следующую специфическую запись:

$$r_i \leftrightarrow \left(\frac{0}{1}, \dots, \frac{1}{i}, \dots, \frac{0}{n}, \frac{z_i^1}{n+1}, \dots, \frac{z_i^c}{n+c}, \dots, \frac{z_i^k}{n+k}, \frac{0}{n+k+1}, \dots, \frac{0}{m} \right), \quad (20)$$

а вектор касательной (7) имеет вид

$$r_i \leftrightarrow \left(\frac{0}{1}, \dots, \frac{0}{i-1}, \frac{1}{i}, \frac{0}{i+1}, \dots, \frac{0}{n}, \frac{z_i}{n+1}, \frac{0}{n+1}, \dots, \frac{0}{m} \right). \quad (21)$$

Для вычисления значений скалярных произведений $r_i r_j$ перемножаем компоненты векторов r_i и r_j с одинаковыми номерами и суммируем произведения; имеем:

$$r_i r_j \leftrightarrow \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{0}{i} + \frac{0}{j} \cdot \frac{1}{j} + \frac{z_i^c}{n+1} \cdot \frac{z_j}{n+1} \right) \leftrightarrow 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + z_i \cdot z_j = z_i z_j, \quad (22)$$

$$r_i r_i \leftrightarrow \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{i} + \frac{z_i}{n+1} \cdot \frac{z_i}{n+1} \right) \leftrightarrow 1 \cdot 1 + z_i \cdot z_i = 1 + (z_i)^2. \quad (23)$$

Здесь проведено вычисление коэффициентов метрической формы поверхности (о метрической форме поверхности см. [2, 3]).

2. Нормальная плоскость поверхности

2.1. Нормаль поверхности заданной одной явной скалярной функцией

В 3-мерном пространстве разрешена задача получения вектора, перпендикулярного двум заданным векторам x и y , а именно: векторам x и y перпендикулярен вектор векторного произведения $[x, y]$: $[x, y] \perp x, y$. Если $x = (a, b, c)$ и $y = (f, g, h)$, то

$$[x, y] = (bh - cg, -(ah - cf), ag - bf).$$

Ставится задача: по координатам векторов касательных r_i поверхности $F^{n(m)}$ указать способ написания компонент векторов нормалей поверхности $F^{n(m)}$. Значения компонент векторов r_i позволяют разрешить задачу, см. [1].

Пусть поверхность описывается одной явной скалярной функцией $z = z(x)$ и, соответственно, векторной функцией (7):

$$F_{(1)}^n: r(x, u) = (x^1, \dots, x^n, z(x), u^{n+2}, \dots, u^m).$$

В векторном пространстве V^n евклидова пространства E^m рассматриваем векторы $r_{(p)ijl}$, которые могут иметь ненулевые значения только в компонентах с номерами i, j, l , причем $l = n + 1$, и p – номер вектора. Пусть

$$r_{(1)aijl} = (\dots, a, \dots, b, \dots, c, \dots), \quad r_{(2)aijl} = (\dots, f, \dots, g, \dots, h, \dots), \quad (24)$$

где

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = z_i, \quad f = 0, \quad g = 1, \quad h = z_j. \quad (25)$$

Тем самым векторы $r_{(p)ijl}$ являются векторами касательных координатных x^i -линий поверхности. Для векторов $r_{(1)ijl}$ и $r_{(2)ijl}$ зададим 2-вектор

$$r_{(1)ijl} \wedge r_{(2)ijl} = (\dots, bh - cg, \dots, -(ah - cf), \dots, ag - bf, \dots) \quad (26)$$

того же вида $r_{(p)ijl}$. При заданных значениях (25) компонент в (26) получается вектор

$$r_{(1)ijl} \wedge r_{(2)ijl} = v_{ij} = (\dots, -z_i, \dots, -z_j, \dots, 1, \dots). \quad (27)$$

Находим скалярные произведения векторов $r_{(1ijl)}$, $r_{(2ijl)}$ и v_{ij} , воспользовавшись специфической формой записи компонент векторов в разд. 1.7. Для векторов $r_{(1ijl)}$ и $r_{(2ijl)}$ со значениями компонент (25) имеем

$$r_{(1ijl)} \leftrightarrow \left(\frac{0}{1}, \dots, \frac{1}{i}, \dots, \frac{0}{j}, \dots, \frac{z_i}{n+1}, \dots, \frac{0}{m} \right), \quad r_{(2ijl)} \leftrightarrow \left(\frac{0}{1}, \dots, \frac{0}{i}, \dots, \frac{1}{j}, \dots, \frac{z_j}{n+1}, \dots, \frac{0}{m} \right).$$

Вектор v_{ij} (27) имеет вид

$$v_{ij} \leftrightarrow \left(\dots, \frac{-z_i}{i}, \dots, \frac{-z_j}{j}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots \right).$$

Для скалярных произведений векторов получаем

$$r_{(1ijl)} v_{ij} \leftrightarrow \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{-z_i}{i} + \frac{z_i}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \right) \leftrightarrow 1 \cdot (-z_i) + z_i \cdot 1 = 0,$$

$$r_{(2ijl)} v_{ij} \leftrightarrow \left(\frac{1}{j} \cdot \frac{-z_j}{j} + \frac{z_j}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \right) \leftrightarrow 1 \cdot (-z_j) + z_j \cdot 1 = 0,$$

что означает

$$r_{(1ijl)} \perp v_{ij}, \quad r_{(2ijl)} \perp v_{ij} = 0.$$

Находя по (26) последовательно векторы $v_{ijk} = v_{ij} \wedge r_k$ и т.д., получаем n -вектор:

$$r_1 \wedge \dots \wedge r_n = v_{1\dots n} = (-z_1, \dots, -z_n, 1, 0, \dots, 0). \quad (28)$$

Вычисляем скалярные произведения $r_i v_{1\dots n}$: записав согласно разд. 1.7

$$v_{1\dots n} \leftrightarrow \left(\frac{-z_1}{1}, \dots, \frac{-z_n}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{0}{n+2}, \dots, \frac{0}{m} \right),$$

находим

$$r_i v_{1\dots n} \leftrightarrow \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{-z_i}{i} + \frac{z_i}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \right) \leftrightarrow 1 \cdot (-z_i) + z_i \cdot 1 = 0 \text{ для всех } i.$$

Тем самым n -вектор $v_{1\dots n}$ перпендикулярен каждому из векторов касательных r_i к x^i -линиям поверхности. Перпендикулярен n -вектор $v_{1\dots n}$ и векторам прямолинейных образующих $\langle P, e_l \rangle$ поверхности. Выполняется

Теорема 4. Вектор нормали поверхности

$$r(x, u) = \left(x^1, \dots, x^n, z(x), u^{n+2}, \dots, u^m \right),$$

заданной одной скалярной функцией $z = z(x)$, имеет координаты (28):

$$v_{1\dots n} = (-z_1, \dots, -z_n, 1, 0, \dots, 0).$$

На основании теоремы 3 получаем следующую теорему.

Теорема 5. Во всякой обыкновенной точке поверхности, заданной одной явной скалярной функцией, существует единственная нормаль поверхности, определяемая вектором $v_{1...n}$.

Нормаль поверхности (7) есть

$$T_P^\perp F^n = \langle H, v_{1...n} \rangle.$$

2.2. Нормаль поверхности, заданной несколькими явными скалярными функциями

Пусть поверхность описывается k явными скалярными функциями $z^c = z^c(x)$, $c = 1, \dots, k$, и, соответственно, векторной функцией (1):

$$F_{(k)}^{n(m)} : r(x, u) = (x^1, \dots, x^n, z^1(x), \dots, z^k(x), u^{n+k+1}, \dots, u^m).$$

В этом случае, по теореме 2, рассматриваемая поверхность $F^n = F_{(k)}^{n(m)}$ является пересечением k цилиндрических поверхностей $F_c^n = F_{c(1)}^{n(m)}$:

$$F_{(k)}^{n(m)} = \bigcap_c F_{c(1)}^{n(m)}.$$

Векторы касательных к x^i -линиям поверхности $F^n = F_{(k)}^{n(m)}$:

$$(2.2.1) \quad r_i = r_{i(k)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, z_i^1, \dots, z_i^c, \dots, z_i^k, 0, \dots, 0).$$

С использованием теоремы 5 выполняется

Теорема 6. Каждая из цилиндрических поверхностей $F_c^n = F_{c(1)}^{n(m)}$ имеет n векторов касательных r_i^c и единственный вектор нормали.

Векторы касательных поверхностей $F_c^n = F_{c(1)}^{n(m)}$ обозначаем r_i^c . Имеем

$$r_i^c = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, z_i^c, 0, \dots, 0).$$

Вектор нормали поверхности $F_c^n = F_{c(1)}^{n(m)}$ обозначаем v^c . Согласно (28)

$$v^c = (-z_1^c, \dots, -z_i^c, \dots, -z_n^c, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0).$$

В специфической форме записи по разд. 1.7:

$$v^c \leftrightarrow \left(\frac{-z_1^c}{1}, \dots, \frac{-z_i^c}{i}, \dots, \frac{-z_n^c}{n}, \frac{0}{n+1}, \dots, \frac{0}{n+c-1}, \frac{1}{n+c}, \frac{0}{n+c+1}, \dots, \frac{0}{m} \right).$$

Так как $r_i^c \leftrightarrow \left(\frac{0}{1}, \dots, \frac{1}{i}, \dots, \frac{z_i}{n+c}, \dots, \frac{0}{m} \right)$, то выполняется равенство

$$r_i^c v^c = 0.$$

Имеет место следующая

Теорема 7. Векторы нормалей v_c цилиндрических поверхностей $F_c^n = F_{c(1)}^{n(m)}$ являются и векторами нормалей поверхности $F_{(k)}^{n(m)} = \bigcap_c F_{c(1)}^{n(m)}$

пересечения этих цилиндрических поверхностей.

Вычисляем скалярные произведения $r_i v^c$ векторов r_i касательных x^i -линий поверхности $F^n = F_{(k)}^{n(m)}$ и векторов v^c нормалей цилиндрических поверхностей $F_c^n = F_{c(1)}^{n(m)}$: для всех значений c и всех значений i :

$$r_i v^c \leftrightarrow \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{-z_i^c}{i} + \frac{z_i^c}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \right) \leftrightarrow 1 \cdot (-z_i^c) + z_i^c \cdot 1 = 0.$$

Полученные значения и доказывают утверждение. #

Таким образом, выполняется

Теорема 8. Поверхность $F^n = \bigcap_c F_c^n$ в каждой своей обыкновенной

точке имеет k независимых нормалей v_c , совпадающих с нормальными поверхностями F_c^n .

Теперь справедлива следующая

Теорема 9. Нормальная плоскость поверхности $F_{(k)}^{n(m)} = \bigcap_c F_{c(1)}^{n(m)}$, за-

данной k явными скалярными функциями, такова:

$$T_H^\perp F^n = \langle H, v_1, \dots, v_k \rangle,$$

порождается в каждой обыкновенной точке H поверхности нормальными цилиндрических поверхностей $F_c^n = F_{c(1)}^{n(m)}$. Поверхность, заданная одной явной скалярной функцией, обладает единственной нормалью.

Действительно, по теореме 3: $\dim T_H F^n = m - k$, по теореме 9: $\dim T_H^\perp F^n = k$. Значит, сумма размерностей касательной плоскости и нормальной плоскости поверхности F^n в каждой обыкновенной точке равна

$$\dim T_H^\perp F^n + \dim T_H F^n = k + m - k = m,$$

т.е. равна размерности пространства E^m , в котором поверхность лежит; это соотношение верно для всякой поверхности. #

2.3. Сфера Веронезе

Классическая сфера Веронезе описана следующими функциями [5, с. 246]:

$$u^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} yz, \quad u^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} xz, \quad u^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} xy,$$

$$u^4 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 - y^2), \quad u^5 = \frac{1}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2); \quad (29)$$

в погружении $F^3: E^3 \rightarrow E^5$. При этом сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ пространства E^3 отображается на гиперсферу пространства $E^5: \sum_j (u^j)^2 = 1$. Поверхность

F^3 3-параметрическая, в стандартной параметризации может быть описана в 8-мерном пространстве E^8 :

$$F_{(5)}^{3(8)}: r(x, y, z, u) = (x, y, z, u^1, \dots, u^5). \quad (30)$$

Векторы касательных:

$$r_x = (1, 0, 0, u_x^1, \dots, u_x^5), \quad r_y = (0, 1, 0, u_y^1, \dots, u_y^5), \quad r_z = (0, 0, 1, u_z^1, \dots, u_z^5).$$

Касательная плоскость $T_H F_{(5)}^{3(8)}$ поверхности $F_{(5)}^{3(8)}$ в произвольной точке H 3-мерна:

$$T_H F_{(5)}^{3(8)} = (H, r_x, r_y, r_z).$$

Функциями (29) в E^8 заданы цилиндрические поверхности:

$$F_1^{3(5)}: r_1(x, y, z, u, s) = r_1(x, y, z, u^2, s_2, s_8),$$

$$F_2^{3(5)}: r(x, y, z, u, s) = r(x, y, z, s_1, u^2, s_3, \dots, s_8), \dots,$$

$$F_5^{3(5)}: r(x, y, z, u, s) = r(x, y, z, s_1, \dots, s_4, u_5).$$

Векторы нормалей цилиндрических поверхностей $F_{c(1)}^{3(5)}$ в точке (x_0, y_0, z_0) по теореме 4, имеют следующие координаты:

$$c = 1. \quad v_1 = (0, -u_y^1, -u_z^1, 1, 0, 0, 0, 0) = \left(0, -\frac{z_0}{\sqrt{3}}, -\frac{y_0}{\sqrt{3}}, 1, 0, 0, 0, 0\right),$$

$$c = 2. \quad v_2 = (-u_x^2, 0, -u_z^2, 0, 1, 0, 0, 0) = \left(-\frac{z_0}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{x_0}{\sqrt{3}}, 0, 1, 0, 0, 0\right),$$

$$c = 3. \quad v_3 = (-u_x^3, 0, -u_z^3, 0, 0, 0, 1, 0, 0) = \left(-\frac{y_0}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{x_0}{\sqrt{3}}, 0, 0, 1, 0, 0\right),$$

$$c = 4. \quad v_4 = (-u_x^4, -u_z^4, 0, 0, 0, 0, 1, 0) = \left(-\frac{x_0}{\sqrt{3}}, \frac{y_0}{\sqrt{3}}, 0, 0, 0, 0, 1, 0\right),$$

$$c = 5. \quad v_5 = \left(-u_x^5, -u_y^5, -u_z^5, 0, 0, 0, 1 \right) = \left(-\frac{x_0}{3}, -\frac{y_0}{3}, \frac{z_0}{3}, 0, 0, 0, 1 \right).$$

Это же и нормальные векторы поверхности (29), см. теорему 7. Имеем нормальную плоскость

$$T_H^\perp F_{(5)}^{3(8)} = (H, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5),$$

Размерность нормальной плоскости $T_H^\perp F_{(5)}^{3(8)}$ поверхности (29) сферы Веронезе равна 5.

Заключение

Выше указаны координаты векторов нормалей поверхностей многомерного евклидова пространства E^m , $m \geq 3$, описанных явными скалярными функциями $z^c = z^c(x)$, $c = 1, \dots, k$. Тем самым указаны и нормальные плоскости поверхностей. Поверхности, описываемые k явными скалярными функциями $z^c = z^c(x)$, являются пересечением k цилиндрических поверхностей, описываемых каждой из функций $F_{(k)}^{3(m)}$. Размерность каждой из цилиндрических поверхностей равна $(m - 1)$. Для примера выписаны касательная плоскость классической сферы Веронезе [5, с. 246] и ее нормальная плоскость. Формы кривизны поверхности пересечения цилиндрических поверхностей совпадают с формами кривизны цилиндрических поверхностей. Коэффициенты форм кривизны цилиндрических поверхностей выражены через коэффициенты метрических форм цилиндрических поверхностей [1, 2]. Тем самым разрешен вопрос об определяемости поверхности метрическими формами цилиндрических поверхностей.

Список литературы

1. Долгарев, А. И. Многомерные поверхности I. Выражение коэффициентов второй квадратичной формы евклидовой поверхности через коэффициенты первой квадратичной формы / А. И. Долгарев // Moderni vymozhenosti vedy – 2014 : materialy X Miedzynarodowej naukow-praktycznej konferencji, dil 34. Matematyka. Fizyka. – Praga : Education and Skience. s.r.o., 2014. – С. 30–40.
2. Долгарев, А. И. Простая теория евклидовых поверхностей произвольной размерности / А. И. Долгарев // Международный научный институт «EDUCATIO». – 2014. – № 3, ч. 6. – С. 58–61.
3. Долгарев, И. А. Обзор простой теории поверхностей многомерных евклидовых пространств / И. А. Долгарев, А. И. Долгарев // Актуальные вопросы развития инновационной деятельности в новом тысячелетии : тр. XV Междунар. науч.-практ. конф. (22–23 мая, 2015, Новосибирск, Россия). – Новосибирск, 2015. – С. 49–58.
4. Долгарев, А. И. Единая кривизна 2-мерной поверхности 5-мерного евклидова пространства / А. И. Долгарев // Современные концепции научных исследований. Евразийский союз ученых : материалы V Междунар. науч.-практ. конф. – М. : ЕСУ-С, 2014. – Ч. 5. – С. 26–29.
5. Кривошапко, С. Н. Энциклопедия аналитических поверхностей / С. Н. Кривошапко, В. Н. Иванов. – М. : ЛИБРОКОМ, 2010. – 360 с.

References

1. Dolgarev A. I. *Moderni vymozhenosti vedy – 2014: materialy X Miedzynarodowej naukow-praktycznej konferencji, dil 34. Matematyka. Fizyka* [Modern advances in science – 2014: Proceedings of X International scientific and practical conference, Mathematics. Physics]. Praga: Education and Skience. s.r.o., 2014, pp. 30–40.
2. Dolgarev A. I. *Mezhdunarodnyy nauchnyy institut «EDUCATIO»* [International Research Institute “EDUCATIO”]. 2014, no. 3, part 6, pp. 58–61.
3. Dolgarev I. A., Dolgarev A. I. *Aktual'nye voprosy razvitiya in-novatsionnoy deyatel'nosti v novom tysyacheletii: tr. XV Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. (22–23 maya, 2015, Novosibirsk, Rossiya)* [Topical problems of innovative activity development in the new millennium: proceedings of XV International scientific and practical conference (22nd–23rd May 2015, Novosibirsk, Russia)]. Novosibirsk, 2015, pp. 49–58.
4. Dolgarev A. I. *Sovremennye kontseptsii nauchnykh issledovaniy. Evraziyskiy soyuz uchenykh: materialy V Mezhdunar. nauch.-prakt. konf.* [Modern conceptions of scientific research. the Eurasian Union of Scientists: proceedings of V International scientific and practical conference]. Moscow: ESU-S, 2014, part 5, pp. 26–29.
5. Krivoshapko S. N. *Entsiklopediya analiticheskikh poverkhnostey* [Encyclopedia of analytical surfaces]. Moscow: LIBROKOM, 2010, 360 p.

Долгарев Артур Иванович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: deiivar@yandex.ru

Dolgarev Artur Ivanovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling, Penza
State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

УДК 514

Долгарев, А. И.

Нормальные векторы евклидовых многомерных поверхностей /

А. И. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 68–83. DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-7